233 - Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

Cadre : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Éléments d'analyse matricielle

1) Norme matricielle

Définition 1. On appelle norme matricielle toute norme sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'une norme matricielle est sous-multiplicative lorsque, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.

Définition 2. Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$. L'application $|||.||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ définie pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$|||A||| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{v} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\| \leqslant 1}} \frac{\|Av\|}{v} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ \|v\| 11}} \|Av\|$$

est une norme matricielle multiplicative,dite subordonnée à la norme $\|.\|$.

Proposition 3. *Soit $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme $\|.\|$. Pour tout $v \in \mathbb{K}^n$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\|Av\| \leqslant |||A||| \, \|v\|$.*

Définition 4. Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit la norme $\|.\|_p$ par :

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < +\infty \quad \text{et} \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$$

On notera $|||.|||_p$ la norme matricielle subordonnée associée.

Proposition 5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

(i) *Pour toute norme subordonnée $|||.|||$, on a $|||I_n||| = 1$.*

(ii) $|||A|||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$

(iii) $|||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

Contre-exemple 6. *La norme $A \mapsto \sqrt{A^\star A}$ n'est pas subordonnée.*

Proposition 7. *Soit $|||.|||$ une norme subordonnée et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $|||B||| \leqslant 1$. Alors $I_n + B$ est inversible et $\left|\left|\left|(I+B)^{-1}\right|\right|\right| = \frac{1}{1 - |||B|||}$.*

2) Rayon spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 8. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A. On définit le rayon spectral de A par $\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$.

Exemple 9. *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, on a $\rho(A) = 2$.*

Proposition 10. *On a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^\star A)} = \sqrt{\rho(AA^\star)}$. De plus, si U est unitaire, alors $|||A|||_2 = |||UA|||_2 = |||AU|||_2 = |||U^\star AU|||_2$. Enfin, si A est normale, alors $|||A|||_2 = \rho(A)$.*

Exemple 11. *Si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire, on a $|||U|||_2 = 1$.*

Théorème 12. *Pour toute norme matricielle $|||.|||$, on a $\rho(A) \leqslant |||A|||$.*

Théorème 13. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$

(ii) $\forall \, v \in \mathbb{K}^n$, $\lim_{k \to +\infty} A^k v = 0$

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) $\sum_{k=0}^\infty A^k$ *converge.*

(v) Il existe une norme subordonnée telle que $|||A||| < 1$.

Dans ce cas, on a $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty A^k$.

3) Conditionnement

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée à $\|.\|$.

Proposition 14. *Soient $b \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{K}^n$ la solution de $Ax = b$. Pour une perturbation δb de b, $x + \delta x$ désigne la solution de $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Alors :*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \, |||A||| \, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Définition 15. On appelle conditionnement de A relativement $|||.|||$ le nombre $\mathrm{cond}(A) = \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \, |||A|||$. Lorsque $|||.||| = |||.|||_p$, on note $\mathrm{cond}_p(A)$.

Exemple 16. *Si A est unitaire,* $\mathrm{cond}_2(A) = 1$.

Proposition 17. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}^\star$. Alors :*

(i) $\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$

(ii) $\mathrm{cond}(I_n) = 1$

(iii) $\mathrm{cond}(A) \geqslant 1$

(iv) $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$

Proposition 18. *Si A est hermitienne,* $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|}$.

II Systèmes linéaires : méthodes directes

1) Méthode de Gauss

Méthode 19 (Gauss)**.** *On souhaite résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$.*

(i) Processus d'élimination, qui équivaut à déterminer $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que MA soit triangulaire supérieure.

(ii) On calcule simultanément le vecteur Mb.

(iii) On résout le système $MAx = MB$.

Remarque 20. *En pratique, on ne calcule pas M, mais MA et Mb.*

Exemple 21. *Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = {}^t\begin{pmatrix} 12 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, on trouve $MA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ et $Mb = {}^t\begin{pmatrix} 12 & -13 & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$.*

Théorème 22. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe au moins une matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que MA soit triangulaire supérieure.*

Corollaire 23. *Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$, il existe une matrice M telle que l'on puisse résoudre le système $MAx = Mb$ par une méthode de remontée.*

2) Factorisation LU

Théorème 24. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n sous-matrices diagonales $\Delta_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ soient inversibles. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure L dont les termes diagonaux valent 1 et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. Cette factorisation est unique.*

Exemple 25. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

Méthode 26. *On souhaite résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$, grâce à la factorisation LU.*

(i) Écrire $A = LU$.

(ii) Trouver $y \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ly = b$.

(iii) Trouver $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ux = y$.

Exemple 27. *Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = {}^t\begin{pmatrix} 12 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, on trouve $y = {}^t\begin{pmatrix} 12 & 11 & \frac{351}{20} \end{pmatrix}$ et $x = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.*

III Systèmes linéaires : méthodes itératives

1) Généralités et notions de convergence

Méthode 28. *On cherche à approximer la solution x du système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$. On pose pour cela $A = M - N$, où $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est facile à inverser (diagonale, triangulaire, orthogonale...). On obtient la méthode itérative :*

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = F(x^{(k)}) \tag{M}$$

Si la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^∞, alors x^∞ est solution de $Ax = b$. De plus, x^∞ est un point fixe de F.

Définition 29. Soient $A = M - N$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. La méthode itérative (M) est dite convergente lorsque :

$$\forall\, b \in \mathbb{K}^n,\ \forall\, x^{(0)} \in \mathbb{K}^n,\ \lim_{k \to \infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Remarque 30. *En posant $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ et $B = M^{-1}N$, on a $e^{(k+1)} = Be^{(k)}$, et la méthode itérative (M) converge ainsi lorsque, par exemple, $\rho(B) < 1$.*

2) Méthode de Jacobi

Définition 31. On considère la décomposition $A = M - N$, avec $M = D$ et $N = E + F$, où les matrices D, E, F sont définies comme suit :

$$\begin{cases} (D)_{i,j} = a_{i,j} \text{ si } i = j,\ 0 \text{ sinon} \\ (-E)_{i,j} = a_{i,j} \text{ si } i > j,\ 0 \text{ sinon} \\ (-F)_{i,j} = a_{i,j} \text{ si } i < j,\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de Jacobi la matrice $J = M^{-1}N$ obtenue à partir de la décomposition précédente : $J = D^{-1}(E + F) = I_n - D^{-1}A$.

Remarque 32. *La méthode itérative (M) devient alors :*

$$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \tag{J}$$

Théorème 33. *Si la matrice A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.*

Exemple 34. *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, la méthode de Jacobi converge si $|a| < \frac{1}{2}$.*

3) Méthode de gradient

Caractérisation de l'α-convexité

Définition 35. Pour $\alpha > 0$, on dit que la fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est α-convexe si pour tous $a, b \in C$ distincts et tout $\lambda \in]0,1[$, on a :

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) - \frac{\alpha}{2} \|a-b\|^2 \lambda(1-\lambda)$$

Théorème 36. *Soit $J : C \to \mathbb{R}$ différentiable. Il y a équivalence entre :*

(i) J *est α-convexe sur* C.

(ii) $\forall\, x, y \in C,\ \langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x-y \rangle \geqslant \alpha \|x-y\|^2$.

(iii) $\forall\, x, y \in C,\ J(x) \geqslant J(y) + \langle \nabla J(y), x-y\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2$.

Si J est deux fois différentiable, on a aussi : $\left\langle d^2 J(x) \cdot y, y \right\rangle \geqslant \alpha \|y\|^2$.

Méthode de gradient

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose J différentiable. On cherche, s'il existe, un élément $u \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$$

Pour cela, on utilise les méthodes de gradient. On considère la suite :

$$u_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k - \rho^k \nabla J(u^k)$$

Il existe plusieurs possibilités pour choisir les ρ^k, par exemple :

(i) Gradient à pas fixe : $\rho^k = \rho$ une constante positive fixée.

(ii) Gradient à pas optimal : ρ^k minimise $\rho \mapsto J\left(u^k - \rho \nabla J(u^k)\right)$.

Théorème 37. *Si J est α-convexe et différentiable, et que ∇J est L-lipschitzienne, alors la méthode de gradient à pas optimal converge vers l'unique minimum de J.*

Application 38. *Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$J(X) = \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle + c$$

Cette fonctionnelle satisfait les conditions du théorème précédent. De plus, son minimum est atteint en $X_0 \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\nabla J(X_0) = AX - b = 0$. On a donc une méthode itérative pour approcher la solution de $AX = b$.

IV Recherche d'éléments propres

1) Localisation des valeurs propres

Définition 39. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le i-ième disque de Gerschgorin est le disque fermé de centre $a_{i,j}$ et de rayon $r_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$.

Théorème 40. *Les valeurs propres d'une matrice complexe sont situées dans la réunion des disques de Gerschgorin.*

2) Méthode QR

Théorème 41. *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$. De plus, on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de R soient des réels strictement positifs. La factorisation QR correspondante est alors unique. Cette factorisation forme un homéomorphisme $\mathcal{U}_n(C) \times T_n^+(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Théorème 42 (Méthode QR)**.** *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On suppose que ses valeurs propres sont de modules distincts et on les classe par modules décroissants : $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. On construit la suite :*

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ et P^{-1} admet une décomposition LU. Alors la diagonale de A_k converge vers $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et les coefficients sous la diagonale tendent vers 0.

Développements

- Algorithme de gradient à pas optimal (37) [Cia88]
- Méthode QR (42) [Cia88]

Références

[Cia88] P. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation.* Masson

[All12] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique